

1

От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длиной на l см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию.

2

В треугольнике $\triangle ABC$ с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L . Найдите длину отрезка AL , если длина вектора $4 \cdot \vec{AB} + 5 \cdot \vec{AC}$ равна 2016.

3

На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1 , лежит в грани AA_1C_1C . Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите отношение объёма пирамиды QAA_1C_1 к объёму призмы.

4

Кузнечик прыгает на 10 см вправо с вероятностью $p = 0.8$ и влево с вероятностью $q = 0.2$. Какова вероятность того, что на каком-то шаге кузнечик окажется справа от исходной точки на расстоянии 10 см?

5

Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$. Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых как минимум два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

6

Решите уравнение

$$\begin{aligned}x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 \\ = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49.\end{aligned}$$

7

Вычислите $\log_2 \log_8 \sqrt{\underbrace{\sqrt{\dots \sqrt{64}}}_{64 \text{ корня}}}$

8

Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ и положительным направлением оси Ox , где $f(x) = g(h(i(j(k(l(m(n(o(p(q(x))))))))))$.
Пусть:

$$q(x) = x^2 + 3$$

$$p(x) = \sin(\pi + x - 4)$$

$$o(x) = e^x$$

$$n(x) = \ln(e + x - 1)$$

$$m(x) = \frac{1}{x}$$

$$l(x) = x^3 - x$$

$$k(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$j(x) = \arctg(x)$$

$$i(x) = 2 \cos(x)$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$g(x) = 2x - 1$$

9

Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $\mathcal{U}_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

10

Стороны основания кирпича равны 28 см и 9 см, а высота 6 см. Улитка ползёт прямолинейно по граням кирпича из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Горизонтальная и вертикальная составляющие её скорости v_x и v_y связаны соотношением $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ (например, на верхней грани $v_y = 0$ см/мин, поэтому $v_x = v = 1$ см/мин). Какое наименьшее время может затратить улитка на своё путешествие?

11

Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

12

Про функцию $f(x)$ и некоторое положительное число c известно, что $f(x + c) = \frac{\sqrt{3}f(x) + 1}{\sqrt{3} - f(x)}$ при всех значениях x . При каком наименьшем целом значении k из интервала $(25; 50)$ можно утверждать, что $f(x + kc) = f(x)$ при всех x ?

13

Решите уравнение

$$9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2 \arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} + \log_3(\arccos(6x+3)) = 0.$$

а) Найдите все корни уравнения. **б)** Отберите корни из отрезка $\left[-\frac{43\pi}{11}, e^{2025}\right]$.

14

На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2, KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2 , причём окружность Ω_1 касается сторон KN и LM , а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN . Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB , а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS . **а)** Найдите $\angle SAB$. **б)** Найдите длину отрезка CQ .

15

Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\pi/6}(2x-5) - \log_{\pi/6}(7-2x)\right) \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right) (|x-4| - |2x-5|) \geq 0.$$

16

Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в $\mathit{4}$ раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от $\mathit{16}$ тысяч рублей до $\mathit{20}$ тысяч рублей, а цена акции из третьего пакета не меньше $\mathit{42}$ тысяч рублей и не больше $\mathit{60}$ тысяч рублей. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

17

Пусть $\mathcal{X}$ — такая точка внутри треугольника ABC , что $\mathcal{X}A \cdot BC = \mathcal{X}B \cdot AC = \mathcal{X}C \cdot AB$; I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников $\mathcal{X}BC, \mathcal{X}CA$ и $\mathcal{X}AB$ соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке. **б)** Дан фиксированный треугольник ABC . Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в $\mathcal{D}$, проходящая через A , пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b . Точку $\mathcal{D}$ назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC ?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg} \left((3a - 1) \sin^2 x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1) \sin x + \operatorname{tg}(ax - a\pi) \right) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

19

- а)** Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022} ?
- б)** Произведение цифр натурального числа n равно x , а произведение цифр числа $n + 1$ равно y . Может ли оказаться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y - 1$, а произведение цифр числа $m + 1$ равно $x - 1$?
- в)** В вершинах правильного 100 -угольника поставили 100 фишек, на которых нанесены номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За один ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, при условии, что номера этих фишек различаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка передвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?