

1

От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длиной на 1 см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию.

2

В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L . Найдите длину отрезка AL , если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

3

На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1 , лежит в грани AA_1C_1C . Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите отношение объема пирамиды QAA_1C_1 к объему призмы.

4

Кузнечик прыгает на 10 см вправо с вероятностью $p = 0,8$ и влево с вероятностью $q = 0,2$. Какова вероятность того, что на каком-то шаге кузнечик окажется справа от исходной точки на расстоянии 10 см?

5

Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$. Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых как минимум два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

6

Решите уравнение $x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49$.

7

Вычислите

$$\log_2 \log_8 \sqrt{\underbrace{\sqrt{\dots \sqrt{64}}}_{64 \text{ корня}}}$$

8

Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ и положительным направлением оси Ox , где $f(x) = g(h(i(j(k(l(m(n(o(p(q(x))))))))))$. Пусть:

$$q(x) = x^2 + 3$$

$$p(x) = \sin(\pi + x - 4)$$

$$o(x) = e^x$$

$$n(x) = \ln(e + x - 1)$$

$$m(x) = \frac{1}{x}$$

$$l(x) = x^3 - x$$

$$k(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$j(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

$$i(x) = 2 \cos(x)$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$g(x) = 2x - 1$$

9

Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

10

Стороны основания кирпича равны 28 см и 9 см, а высота 6 см. Улитка ползёт прямолинейно по граням кирпича из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Горизонтальная и вертикальная составляющие её скорости v_x и v_y связаны соотношением $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ (например, на верхней грани $v_y = 0$ см/мин, поэтому $v_x = v = 1$ см/мин). Какое наименьшее время может затратить улитка на своё путешествие?

11

Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

12

Про функцию $f(x)$ и некоторое положительное число c известно, что $f(x + c) = \frac{\sqrt{3}f(x) + 1}{\sqrt{3} - f(x)}$ при всех значениях x . При каком наименьшем целом значении k из интервала $(25; 50)$ можно утверждать, что $f(x + kc) = f(x)$ при всех x ?

13

Решите уравнение $9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2 \arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} - \log_3(\arccos(6x+3)) = 0$.

а) Найдите все корни уравнения.

б) Отберите корни из отрезка $\left[-\frac{43\pi}{11}, e^{2025}\right]$.

14

На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2, KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2 , причём окружность Ω_1 касается сторон KN и LM , а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN . Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB , а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS .

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ .

15

Найдите все решения неравенства $(\log_{\pi/6}(2x - 5) - \log_{\pi/6}(7 - 2x)) \left(\cos \left(x + \frac{7}{4} \right) - \cos(2x - 1) \right) \geq 0$.

16

Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тысяч рублей до 20 тысяч рублей, а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тысяч рублей и не больше 60 тысяч рублей. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

17

а) Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC , что $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$; I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

б) Дан фиксированный треугольник ABC . Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D , проходящая через A , пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b . Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC ?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\arctg((3a-1)\sin^2 x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + \operatorname{tg}(ax - a\pi)) - ax + a\pi = 0$ имеет ровно три решения.

а) Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022} ?

б) Произведение цифр натурального числа n равно x , а произведение цифр числа $n + 1$ равно y . Может ли оказаться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y - 1$, а произведение цифр числа $m + 1$ равно $x - 1$?

в) В вершинах правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых нанесены номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За один ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, при условии, что номера этих фишек различаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка передвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?